数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 134-148

$\Lambda_p(f)$ の線形性と $\ell_1 = \Lambda_1(f)$ について

松江工業高等専門学校　中村　元 (Gen Nakamura)
Matsue National College of Technology
広島女学院大学　橋本　一夫 (Kazuo Hashimoto)
Hiroshima Jogakuin University

1　準備

$f(\neq 0)$ を 実数直線 $\mathbb{R}$ で定義された L_p-関数とし, $1 \leq p < \infty$ とする. 任意の実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n) \in \mathbb{R}^\infty$ に対して, 次を定義する:

$$\Psi_p(\boldsymbol{a}; f) = \left(\sum_k \int_{\mathbb{R}} |f(x - a_k) - f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$\Lambda_p(f) = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\infty : \Psi_p(\boldsymbol{a}; f) < +\infty\}.$$

すると, 次の結果は知られている (cf.[3]):

- $\boldsymbol{a} = (a_n) \in \mathbb{R}^\infty$ に対して, $\Psi_p(|\boldsymbol{a}|; f) = \Psi_p(\boldsymbol{a}; f)$ が成り立つ. ここで $|\boldsymbol{a}| = (|a_n|)$;
- $1 \leq p \leq q < +\infty$ に対して, $\Lambda_p(f) \subset \Lambda_q(f)$;
- $\Psi_p(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}; f) \leq \Psi_p(\boldsymbol{a}; f) + \Psi_p(\boldsymbol{b}; f)$, つまり, 集合 $\Lambda_p(f)$ は $\mathbb{R}^\infty$ の加法的部分群をなしている.

以下で, $W^{1,p}(\mathbb{R})$ を Sobolev 空間, つまり, $L_p(\mathbb{R})$ に属する関数 f で, 超関数の意味での導関数 Df が $L_p(\mathbb{R})$ に属するものの全体とする. 特に, $f \in L^1(\mathbb{R})$ で, Df が $\mathbb{R}$ 上で有界変動を持つ測度となるとき, f を 有界変動関数と呼ぶ. このような関数のクラスを $BV(\mathbb{R})$ で表わす. つまり,

$$f \in BV(\mathbb{R}) \iff \begin{array}{l} \mathbb{R} \text{ 上の Radon 測度 } \exists\mu\text{: } |\mu|(\mathbb{R}) < +\infty \text{ かつ} \\ \int_{\mathbb{R}} f\varphi' dx = -\int \varphi d\mu,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \end{array}$$

ここで, $|Df|(\mathbb{R}) = |\mu|(\mathbb{R})$ は μ の全変動を意味する.

明らかに, $\mathbb{R}$ 上の関数 f が絶対連続でその微分 f' が $L_1(\mathbb{R})$ 可積分ならば, 有界変動関数である. 特に, Sobolev 空間 $W^{1,1}(\mathbb{R}) \subset BV(\mathbb{R})$ ([5, p.222] を参照).

---

[1]2000 Mathematics Subject Classification. Primary 26D10, 46A45, 46E35; Secondary 60G30
[2]Key words and phrases. linearlity, essential variation, Sobolev space, distribution.

本田・岡崎・佐藤は [3] で, 次の結果を与えた:

(i) ([3, Theorem 1, Theorem 2])

$1 \leq p < +\infty$, $f(\neq 0) \in L_p(\mathbb{R}) \Rightarrow \Lambda_p(f) \subset \ell_p$. 特に, $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \Rightarrow \ell_p = \Lambda_p(f)$.

(ii) ([3, Corollary 4])

$1 < p < +\infty$, $f(\neq 0) \in L_p(\mathbb{R})$ とすれば, $\ell_p = \Lambda_p(f) \Longleftrightarrow f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

本報告では $\Lambda_p(f)$ の線形性について論じると共に, (ii) で, $p = 1$ のとき, 条件 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ をもっと弱め, $f \in BV(\mathbb{R})$ で置き換えることで, $\ell_1 = \Lambda_1(f)$ となるための必要条件を与えることができることを示す. つまり $f(\neq 0) \in L_1(\mathbb{R})$ であれば, $\ell_1 = \Lambda_1(f) \Longleftrightarrow f \in BV(\mathbb{R})$ が成り立つことを示す (定理 8).

2 $\Lambda_1(f)$ の線形性

定理 1 $1 \leq p < +\infty$, $f \in L_p(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) は同値である:

(i) $\Lambda_p(f)$ は $\mathbb{R}^\infty$ の線形部分空間である;

(ii) 任意の $0 \leq k \leq 1$ に対して, 次を満たす定数 $C(k) > 0$ が存在する:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-ka) - f(x)|^p dx \leq C(k) \int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|^p dx, \ \forall a > 0;$$

(iii) ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-ka) - f(x)|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|^p dx, \ 0 \leq \forall k \leq 1, \ \forall a > 0$$

が成り立つ.

証明 (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す. そこで, $\boldsymbol{a} = (a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_n) \in \Lambda_p(f)$ とすると、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \Lambda_p(f)$ は次の不等式から容易に得られる.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |f(x-(a_n+b_n)) - f(x)|^p dx \\
\leq & \int_{\mathbb{R}} \{|f(x-(a_n+b_n)) - f(x-b_n)| + |f(x-b_n) - f(x)|\}^p \, dx \\
\leq & \ 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \{|f(x-(a_n+b_n)) - f(x-b_n)|^p + |f(x-b_n) - f(x)|^p\} \, dx \\
= & \ 2^{p-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x-a_n) - f(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x-b_n) - f(x)|^p dx \right\}.
\end{aligned}$$

次に, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} = (a_n) \in \Lambda_p(f) \Rightarrow \alpha\boldsymbol{a} \in \Lambda_p(f)$ を示す. $|\alpha| < N$ となる自然数 N を任意に取る. $0 < |\alpha|/N < 1$ より, (ii) の条件より

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |f(x-\alpha a_n) - f(x)|^p dx \\
= & \int_{\mathbb{R}} |f(x-|\alpha a_n|) - f(x)|^p dx \\
\leq & \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left| f\left(x - \frac{|\alpha a_n|}{N} i\right) - f\left(x - \frac{|\alpha a_n|}{N}(i-1)\right) \right| \right\}^p dx \\
\leq & \int_{\mathbb{R}} N^{p-1} \sum_{i=1}^{N} \left| f\left(x - \frac{|\alpha a_n|}{N} i\right) - f\left(x - \frac{|\alpha a_n|}{N}(i-1)\right) \right|^p dx \\
= & N^{p-1} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{|\alpha a_n|}{N} i\right) - f\left(x - \frac{|\alpha a_n|}{N}(i-1)\right) \right|^p dx \\
= & N^{p-1} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{|\alpha a_n|}{N}\right) - f(x) \right|^p dx \\
\leq & N^p C(|\alpha|/N) \int_{\mathbb{R}} |f(x-|a_n|) - f(x)|^p dx \\
= & N^p C(|\alpha|/N) \int_{\mathbb{R}} |f(x-a_n) - f(x)|^p dx < \infty.
\end{aligned}$$

よって, $\alpha\boldsymbol{a} \in \Lambda_p(f)$. 以上のことから $\Lambda_p(f)$ が線形空間であることがわかる.

次に, 逆 (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す. 対偶で証明するために, (ii) が成り立たないとすると, ある $0 < k_0 \leq 1$ が存在して, 任意の自然数 n に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-k_0 a_n) - f(x)|^p dx > 3^n \int_{\mathbb{R}} |f(x-a_n) - f(x)|^p dx \tag{1}$$

となる $a_n > 0$ が取れる. 一方,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x-k_0 a_n) - f(x)|^p dx & \leq \int_{\mathbb{R}} (|f(x-k_0 a_n)| + |f(x)|)^p dx \\
& \leq 2^{p-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x-k_0 a_n)|^p dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right\} \\
& = 2^p \|f\|_{L_p}^p
\end{aligned} \tag{2}$$

$f \neq 0$, $f \in L_p$ で,

$$f(x-a_n) = f(x) \quad a.e.$$

は成立しないので, 任意の n に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-a_n) - f(x)|^p dx \neq 0$$

となることがわかる. よって (1) と (2) より

$$0 < \int_{\mathbb{R}} |f(x-a_n) - f(x)|^p dx < \frac{2^p}{3^n} \|f\|_{L_p}^p < 2^{p-n} \|f\|_{L_p}^p$$

が得られる. 各 n に対して, 不等式

$$N\int_{\mathbb{R}}|f(x-a_n)-f(x)|^p dx \le 2^{p-n}\|f\|_{L_p}^p$$

が成り立つ最大の N を $N(n)$ とおくと,

$$N(n)\int_{\mathbb{R}}|f(x-a_n)-f(x)|^p dx \le 2^{p-n}\|f\|_{L_p}^p \tag{3}$$

が成り立つ. また, $N(n)$ の最大性より,

$$\begin{aligned} 2^{p-n}\|f\|_{L_p}^p &< (N(n)+1)\int_{\mathbb{R}}|f(x-a_n)-f(x)|^p dx \\ &\le 2N(n)\int_{\mathbb{R}}|f(x-a_n)-f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

従って, (1) より

$$\begin{aligned} 2^{p-n-1}\|f\|_{L_p}^p/N(n) &< \int_{\mathbb{R}}|f(x-a_n)-f(x)|^p dx \\ &< \frac{1}{3^n}\int_{\mathbb{R}}|f(x-k_0a_n)-f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

よって,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n 2^{p-1}\|f\|_{L_p}^p < N(n)\int_{\mathbb{R}}|f(x-k_0a_n)-f(x)|^p dx. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &b_1 = a_1, \cdots, b_{N(1)} = a_1 \\ &b_{N(1)+1} = a_2, \cdots, b_{N(1)+N(2)} = a_2 \\ &b_{N(1)+N(2)+1} = a_3, \cdots, b_{N(1)+N(2)+N(3)} = a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

以下同様にして, 数列 $\boldsymbol{b} = (b_n)$ を定義する.

このように定義された数列 $\boldsymbol{b} = (b_n)$ は次の性質を持つ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x-b_n)-f(x)|^p dx = \sum_{n=1}^{\infty}N(n)\int_{\mathbb{R}}|f(x-a_n)-f(x)|^p dx.$$

(3) より,

$$\sum_{n=1}^{\infty}N(n)\int_{\mathbb{R}}|f(x-a_n)-f(x)|^p dx \le \|f\|_{L_p}^p\sum_{n=1}^{\infty}2^{p-n} < +\infty$$

故に,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x-b_n)-f(x)|^p dx < +\infty.$$

従って, $\boldsymbol{b} \in \Lambda_p(f)$.

次に, $k_0\boldsymbol{b} \notin \Lambda_p(f)$ を示す. そのために,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x-k_0b_n)-f(x)|^p dx = \sum_{n=1}^{\infty}N(n)\int_{\mathbb{R}}|f(x-k_0a_n)-f(x)|^p dx$$

に注意して (4) より

$$\sum_{n=1}^{\infty}N(n)\int_{\mathbb{R}}|f(x-k_0a_n)-f(x)|^p dx \geq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n 2^{p-1}\|f\|_{L_p}^p = +\infty.$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x-k_0b_n)-f(x)|^p dx = +\infty.$$

つまり, $k_0\boldsymbol{b} \notin \Lambda_p(f)$. このようにして, (i) $\Leftrightarrow$ (ii) が示された.

最後に, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) を示す. (iii) $\Rightarrow$ (ii) は明らかなので, (ii) $\Rightarrow$ (iii) を示す. 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$M(k) = \sup_{a>0}\frac{\|f(\cdot-ka)-f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_{L_p}}$$

任意の k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
M(k_1+k_2) &= \sup_{a>0}\frac{\|f(\cdot-(k_1+k_2)a)-f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_{L_p}} \\
&\leq \sup_{a>0}\frac{\|f(\cdot-(k_1+k_2)a)-f(\cdot-k_2a)\|_{L_p}+\|f(\cdot-k_2a)-f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_{L_p}} \\
&= \sup_{a>0}\frac{\|f(\cdot-k_1a)-f(\cdot)\|_{L_p}+\|f(\cdot-k_2a)-f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_{L_p}} \\
&\leq M(k_1)+M(k_2).
\end{aligned}$$

$M(1)=1$, $M(|k|)=M(k)$ $(k\in\mathbb{R})$ から $M(\pm n)\leq n$ $(n=,0,1,\cdots)$ が得られる. (ii) の仮定より, $0\leq M(k)<+\infty$ $(0\leq\forall k\leq 1)$ が成り立つことが容易にわかる. 任意の $\forall k\in\mathbb{R}$ に対してもこれが成り立つことを示す. $\forall k\in\mathbb{R}$ とすると, 上記の $M(\cdot)$ に関する三角不等式により,

$$M(k)\leq M(k-[k])+M([k])\leq M(k-[k])+|[k]|<\infty.$$

ここで $[k]$ は k を超えない最大の整数を表す. 今, (iii) が成り立たないと仮定すれば, $\sup_{0<k\leq 1} M(k)=\infty$ が成り立つことから, 区間 $(0,1]$ の中から $M(k_n)\to\infty$ となる数列 (k_n) が取れる. 必要ならば, 部分列を取ることにより, $k_n\to\exists k_0\in[0,1]$ とできる. 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $b_n=k_n-k_0+a$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくと,

$$M(k_n)\leq M(k_0-a)+M(k_n-k_0+a)=M(k_0-a)+M(b_n).$$

よって, $M(b_n) \to \infty$. 以上の結果をまとめると, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $M(b_n) \to \infty$ かつ $b_n \to a$ となる点列 (b_n) が必ず取れることがわかる. これを用いると, $\xi_1 \in (0,1)$ を $M(\xi_1) > 1$ となる様に取れる. $M(\cdot)$ の定義から,

$$\frac{\|f(\cdot - \xi_1 a_1) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_1) - f(\cdot)\|_{L_p}} > 1$$

となる $a_1 > 0$ をとることができる. $t \mapsto f(\cdot - ta_1) \in L_p(\mathbb{R})$ は連続写像だから, 次の不等式を満たし, $\xi_1 \in (c_1, d_1) \subset (0,1)$ となる開区間 (c_1, d_1) をとることができる.

$$\frac{\|f(\cdot - ta_1) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_1) - f(\cdot)\|_{L_p}} > 1 \quad (\forall t \in [c_1, d_1]).$$

更に, $\xi_2 \in (c_1, d_1)$ を $M(\xi_2) > 2$ となるようにとることができる. 同様に, ある $a_2 > 0$ に対して

$$\frac{\|f(\cdot - \xi_2 a_2) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_2) - f(\cdot)\|_{L_p}} > 2,$$

でかつ, $\xi_2 \in (c_2, d_2) \subset (c_1, d_1)$ に対して,

$$\frac{\|f(\cdot - ta_2) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_2) - f(\cdot)\|_{L_p}} > 2 \quad (\forall t \in [c_2, d_2]).$$

となる開区間 (c_2, d_2) が取れる. 以下同様にして, 次の性質を持つように正数列 ξ_n, a_n, $c_n < d_n$ が取れる :

$$\xi_n \in (c_n, d_n) \subset (c_{n-1}, d_{n-1})$$
$$\frac{\|f(\cdot - ta_n) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_n) - f(\cdot)\|_{L_p}} > n \quad (\forall t \in [c_n, d_n])$$

$[0,1] \supset [c_1, d_1] \supset [c_2, d_2] \supset \cdots$ より, 区間縮小法により $\bigcap_{n=1}^{\infty}[c_n, d_n] \neq \emptyset$. そこで, $\xi_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[c_n, d_n]$ とすれば, 任意の n に対して,

$$M(\xi_0) \geq \frac{\|f(\cdot - \xi_0 a_n) - f(\cdot)\|_{L_p}}{\|f(\cdot - a_n) - f(\cdot)\|_{L_p}} > n$$

が成り立つ. 従って, $M(\xi_0) = +\infty$. これは矛盾. よって, (ii) $\Rightarrow$ (iii) が示された. ■

2.1 $\Lambda_p(f)$ が線形空間となる例

定理 2 $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ とする. 実数 $\mathbb{R}$ 上の加算分割 $(a_i)_{-\infty}^{\infty}$:

$$\cdots < a_{-2} < a_{-1} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots, \ \lim_{i \to -\infty} a_i = -\infty, \ \lim_{i \to \infty} a_i = \infty$$

が存在して, 次の条件:

(1) $\inf_{i\in\mathbb{Z}}(a_{i+1}-a_i)>0$;

(2) f は各 (a_i,a_{i+1}) で単調;

が成り立てば, $\Lambda_p(f)$ は線形空間となる.

[証明] 以下, $\varepsilon=(\inf_{i\in\mathbb{Z}}|a_{i+1}-a_i|)/3>0$ と置く. すると, 任意の $0<b<a<\varepsilon$, $x\in\mathbb{R}$ に対して次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}|f(x-b)-f(x)|^p &\le 2^{p-1}\left(|f(x-b)-f(x-a-b)|^p+|f(x-a)-f(x)|^p\right.\\ &\quad \left.+|f(x-b)-f(x+a-b)|^p+|f(x+a)-f(x)|^p\right). \qquad (5)\end{aligned}$$

これを示すために, まず $0<b<a<\varepsilon$ を a, b を任意に選び固定する. すると, 任意の実数 x に対して,

$$I_1=[x-a-b,x-b],\quad I_2=[x,x+a],\quad I_3=[x-a-b,x+a]$$

と置くと, I_1, $I_2\subset I_3$, $I_1\cap I_2=\emptyset$. また区間 I_3 の幅は $2a+b$ で $2a+b<3\varepsilon\le\inf_{i\in\mathbb{Z}}|a_{i+1}-a_i|$ だから $\{i:a_i\in I_3\}$ の要素は高々1個となる. 従って, 次の二つのケースが考えられる:

(a) $\{i:a_i\in I_1\}=\emptyset$;

(b) $\{i:a_i\in I_2\}=\emptyset$.

(a) の場合: 仮定から, $I_1=[x-a-b,x-b]$ では, f は単調だから, $f(x-a-b)\le f(x-a)\le f(x-b)$ or $f(x-a-b)\ge f(x-a)\ge f(x-b)$ より,

$$\begin{aligned}|f(x-b)-f(x)| &\le |f(x-b)-f(x-a)|+|f(x-a)-f(x)|\\ &\le |f(x-b)-f(x-a-b)|+|f(x-a)-f(x)|.\end{aligned}$$

$\therefore$

$$|f(x-b)-f(x)|^p \le 2^{p-1}\left(|f(x-b)-f(x-a-b)|^p+|f(x-a)-f(x)|^p\right).$$

(b) の場合: 仮定から, $I_2=[x,x+a]$ では, f は単調だから, $f(x)\le f(x+a-b)\le f(x+a)$ or $f(x)\ge f(x+a-b)\ge f(x+a)$ より,

$$\begin{aligned}|f(x-b)-f(x)| &\le |f(x-b)-f(x+a-b)|+|f(x+a-b)-f(x)|\\ &\le |f(x-b)-f(x+a-b)|+|f(x+a)-f(x)|.\end{aligned}$$

$\therefore$

$$|f(x-b)-f(x)|^p \le 2^{p-1}\left(|f(x-b)-f(x+a-b)|^p+|f(x+a)-f(x)|^p\right).$$

これより, (5) が成り立つことが分かる. 次に, 定理の条件 (iii) が成り立つことを示すために, $0 < \forall k < 1, \forall a > 0$ と取ると, 明らかに, $0 < ka < a$.

今, 次の 2 つの場合を考える: $a < \varepsilon$, $a \geq \varepsilon$.

先ず, $a < \varepsilon$ のとき, (5) で $b = ka$ と置けば, $0 < ka < a < \varepsilon$ より

$$\begin{aligned}|f(x-ka)-f(x)|^p &\leq 2^{p-1}\left(|f(x-ka)-f(x-a-ka)|^p + |f(x-a)-f(x)|^p\right.\\ &\quad \left. + |f(x-ka)-f(x+a-ka)|^p + |f(x+a)-f(x)|^p\right).\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\|f(\cdot-ka)-f(\cdot)\|_p^p &\leq 2^{p-1}\left(\|f(\cdot-ka)-f(\cdot-a-ka)|^p + \|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_p^p\right.\\ &\quad \left. + \|f(\cdot-ka)-f(\cdot+a-ka)\|_p^p + \|f(\cdot+a)-f(\cdot)\|_p^p\right)\\ &= 2^{p-1}4\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_p^p\\ &= 2^{p+1}\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_p^p. \qquad (6)\end{aligned}$$

$a \geq \varepsilon$ のとき, $c = \inf_{\alpha \geq \varepsilon} \|f(\cdot - \alpha) - f(\cdot)\|_p$ と置けば, $c > 0$ であることが容易に分かる. よって,

$$\frac{\|f(\cdot-ka)-f(\cdot)\|_p}{\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_p} \leq \frac{\|f(\cdot-ka)\|_p + \|f\|_p}{c} = \frac{2\|f\|_p}{c}.$$

故に,

$$\|f(\cdot-ka)-f(\cdot)\|_p^p \leq \left(\frac{2\|f\|_p}{c}\right)^p \|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_p^p. \qquad (7)$$

従って, $C = \max\left\{2^{p+1}, \left(\frac{2\|f\|_p}{c}\right)^p\right\} > 0$ と置けば,

$$\|f(\cdot-ka)-f(\cdot)\|_p^p \leq C\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_p^p \quad \text{for } 0 \leq \forall k \leq 1, \forall a > 0.$$

定理 1 の条件 (iii) が示され, $\Lambda_p(f)$ が $\mathbb{R}^\infty$ の線形部分空間となることが分かる. ■

2.2 $\Lambda_p(f)$ が線形空間にならない例

ここでは, $\Lambda_p(f)$ が線形にならない 2 例について構成法のみを紹介する. 紙面の都合で詳細は省略する.

例 1 $f_0 \in C_0(\mathbb{R})(\neq 0)$, $\mathrm{supp} f_0 \subset [0, \pi]$. 各 $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_{m,n} \in C(\mathbb{R})$ を次で定義する:

$$f_{m,n}(x) = 1 + \frac{1}{m}\sin(nx).$$

すると, 次の条件 (i), (ii) を満足する部分列 $\{m_i\}$, $\{n_i\}$ が存在する:

(i) $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_0(x)\prod_{i=1}^{j} f_{m_i,n_i}(x)$ ($\mathbb{R}$ 上一様).

(ii) $\displaystyle\lim_{i\to\infty}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-\frac{\pi}{n_i})-f(x)|^p dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-\frac{2\pi}{n_i})-f(x)|^p dx}=\infty.$

すると, (i) から $f\in C_0(\mathbb{R})\subset L_p(\mathbb{R})$ が得られる. (ii) から f が定理 1(ii) の条件を満足しないことが得られる. このようにして, $\Lambda_p(f)$ が $\mathbb{R}^\infty$ の部分空間にならないことが示される.

最後にもっと滑らかな関数 f で $\Lambda_p(f)$ が線形にならない例について挙げる.

例 2 $1\le p<\infty$ とする. 次の条件を満たす関数 $f\in L_p(\mathbb{R})$ が存在する:

(i) $f\in C^\infty(\mathbb{R})\cap L_p(\mathbb{R})$ で $f(x)>0$ $(x\in\mathbb{R})$;

(ii) $\mathbb{R}$ の任意の有界区間上で $f'(x)=0$ を満たす x の値は高々有限個;

(iii) $\Lambda_p(f)$ は $\mathbb{R}$ の線形部分空間にならない.

f の構成. まず,

$$\rho(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & (-1<x<1)\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}$$

とおくと, $\rho(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\rho=[-1.1]$ が成り立つ. 更に, $n\in\mathbb{N}$ に対して, $\rho_n(x)=\rho(6(x-n-1/2))$ とおくと, $\operatorname{supp}\rho_n=[n+1/3,n+2/3]$, $0\le\rho_n(x)\le 1/e$ が成り立つ. 更に, 自然数の列 (n_k) に対し,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^2} & (x<1)\\ e^{-x^2}(1+\rho_k(x)\sin n_k\pi x) & (k\le x<k+1)\end{cases}$$

を定義すれば, (n_k) の選び方に依らず, 前述の条件 (i), (ii) は満たされる. 一方, (n_k) を適当に選べば,

$$\|f(\cdot-1/n_k)-f(\cdot)\|_p>2^k\|f(\cdot-2/n_k)-f(\cdot)\|_p,\ (k=1,2,\cdots)$$

が成り立つようにできる. 従って, $\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{n_k}$ とおけば,

$$\|f(\cdot-a/2)-f(\cdot)\|_p^p\le C\|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_p^p,\ (a>0)$$

を満足する定数 C をとることはできないので, 定理 1 より $\Lambda_1(f)$ は $\mathbb{R}$ の線形部分空間にはならないことが確かめられる.

3 $\ell_1=\Lambda_1(f)$ となる条件

$f\in L_p(\mathbb{R})$ に対して, $\mathbb{R}$ の部分集合 D_f を次で定義する:

$$D_f\ =\ \left\{x\in\mathbb{R}:\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt=0\right\}$$

すると, 集合 $\mathbb{R}-D_f$ は測度 0 の集合である.

また, $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して, $\mathbb{R}$ 上の本質的変動 (essential variation) $\operatorname{ess} V(f)$ を次のように定義する:

$$\operatorname{ess} V(f)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|, x_0<x_1<\cdots<x_k,\ x_i\in D_f\right\}.$$

定理 3 $f\in L_1(\mathbb{R})$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right|dx=\operatorname{ess} V(f)$$

これは以下の 2 つの補題 4, 補題 6 から明らかである.

補題 4 $f\in L_1(\mathbb{R})$ に対して, 次が成り立つ:

$$\liminf_{h\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right|dx\geq \operatorname{ess} V(f).$$

証明 D_f の要素の列 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ $(n\geq 2)$ を任意にとる. $h\neq 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right|dx\\
\geq\ &\frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}|f(x-h)-f(x)|\,dx\\
\geq\ &\frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}(f(x-h)-f(x))\,dx\right|\\
=\ &\frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\int_{a_k-h}^{a_{k+1}-h}f(x)\,dx-\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(x)\,dx\right|\\
=\ &\frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\left\{\int_{a_k-h}^{a_k}f(x)\,dx+\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(x)\,dx+\int_{a_{k+1}}^{a_{k+1}-h}f(x)\,dx\right\}-\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(x)\,dx\right|\\
=\ &\frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\int_{a_k-h}^{a_k}f(x)\,dx-\int_{a_{k+1}-h}^{a_{k+1}}f(x)\,dx\right|\\
=\ &\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{h}\int_{a_k-h}^{a_k}f(x)\,dx-\frac{1}{h}\int_{a_{k+1}-h}^{a_{k+1}}f(x)\,dx\right|.
\end{aligned}$$

従って,

$$\liminf_{h\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right|dx\geq\sum_{k=1}^{n-1}|f(a_k)-f(a_{k+1})|.$$

よって,

$$\liminf_{h\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right|dx\geq \operatorname{ess} V(f).$$

■

補題 5 $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\mathrm{ess}\,V(f) < \infty$ とすれば,
(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim\limits_{\substack{h\downarrow 0 \\ x+h\in D_f}} f(x+h)$ は収束する.
(2) (1) より, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$g(x) = \lim_{\substack{h\downarrow 0 \\ x+h\in D_f}} f(x+h)$$

で $\mathbb{R}$ 上の関数を定義すると, $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の右連続関数となり, $g(x) = f(x)$ $(x \in D_f)$
(3) g を (2) で定義された $\mathbb{R}$ 上の関数とする. すると $V(g) = \mathrm{ess}\,V(f)$, ここで, $V(g)$ は g の $\mathbb{R}$ 上の全変動を意味する.

証明 (1) $x \in \mathbb{R}$ に対して, D_f の $\mathbb{R}$ での稠密性から, $t_1 > t_2 > \cdots \downarrow x$ を満たす $\{t_n\} \in D_f$ を任意にとることができる. すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(t_{n+1}) - f(t_n)| \le \mathrm{ess}\,V(f) < +\infty.$$

よって, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(t_{n+1}) - f(t_n))$ は収束, ゆえに $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$ も収束. $\{t_n\}$ の選び方は任意だから, $\lim\limits_{\substack{h\downarrow 0 \\ x+h\in D_f}} f(x+h)$ は収束する.

(2) (1) の結果から, g は右連続. 次に $x \in D_f$ とする. F_x を次で定義する.

$$F_x(h) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt, h \ge 0$$

明らかに, F_x は絶対連続, $F'_x(h) = f(x+h)$ $(x+h \in D_f)$. 故に, $F'_x(\cdot) = f(x+\cdot)$ $a.e.$

$$F_x(h) = \int_0^h F'_x(t)dt + F_x(0) = \int_0^h f(x+t)\,dt$$

$$f(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} F_x(h) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t)\,dt = g(x).$$

(3) (2) より $g|_{D_f} = f$ だから $\mathrm{ess}\,V(f) \le V(g)$. 逆の不等式が成り立つ事を示すため, $\mathbb{R}$ の要素の列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ を任意にとる. g は右連続, D_f は $\mathbb{R}$ で稠密なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $b_k \in [a_k, a_{k+1}) \cap D_f$ $(1 \le k \le n)$ が存在して, $|g(a_k) - g(b_k)| < \varepsilon/2(n-1)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} |g(a_{k+1} - g(a_k)| &\le \sum_{k=1}^{n-1} \{|g(a_{k+1}) - g(b_{k+1})| + |g(b_{k+1}) - g(b_k)| + |g(b_k) - g(a_k)|\} \\
&\le \sum_{k=1}^{n-1} |g(b_{k+1}) - g(b_k)| + \varepsilon \\
&\le \mathrm{ess}\,V(f) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって, $V(g) \le \mathrm{ess}\,V(f)$. ■

補題 6 任意の $f \in L_1(\mathbb{R})$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right| dx \le \operatorname{ess} V(f), \ h \ne 0.$$

証明 $\operatorname{ess} V(f) = \infty$ の場合は明らか.

$\operatorname{ess} V(f) < \infty$ の場合. g を補題 5(2) で定義した右連続関数とすると, 同定理より, $V(g) = \operatorname{ess} V(f) < \infty$, $g = f$ *a.e.*. 従って, Jordan 分解により, 非減少関数 g_1, g_2 が存在して, $g = g_1 - g_2$, $V(g_1) + V(g_2) = V(g)$ と分解できる. 実数 h, $s < t$ を任意にとる.

$$\begin{aligned}
\int_s^t |g_1(x-h) - g_1(x)|\, dx &= \left| \int_s^t (g_1(x-h) - g_1(x))\, dx \right| \\
&= \left| \int_{s-h}^{t-h} g_1(x)\, dx - \int_s^t g_1(x)\, dx \right| \\
&= \left| \int_{s-h}^{s} g_1(x)\, dx - \int_{t-h}^t g_1(x)\, dx \right| \\
&= \left| \int_0^h g_1(s-x)\, dx - \int_0^h g_1(t-x)\, dx \right| \\
&\le \left| \int_0^h |g_1(s-x) - g_1(t-x)|\ dx \right| \\
&\le |h| V(g_1).
\end{aligned}$$

s, t が任意なので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_1(x-h) - g_1(x)|\, dx \le |h| V(g_1).$$

同様に,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_2(x-h) - g_2(x)|\, dx \le |h| V(g_2).$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-h) - f(x)|\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-h) - g(x)|\, dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(x-h) - g_1(x)|\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g_2(x-h) - g_2(x)|\, dx \\
&\le |h| V(g_1) + |h| V(g_2) = |h|(V(g_1) + V(g_2)) = |h| V(g).
\end{aligned}$$

■

定理 7 $f \in L_1(\mathbb{R})$ に対して, 次の関係式が成り立つ:

$$f \in BV(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \operatorname{ess} V(f) < \infty,$$

かつ $|Df|(\mathbb{R}) = \operatorname{ess} V(f)$.

証明 $(\Leftarrow)$ を見るために, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\operatorname{ess} V(f) < \infty$ と置くと, 補題 6 より,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h)-f(x)}{h}\varphi(x)\,dx &= \frac{1}{h}\left\{\int_{\mathbb{R}} f(x-h)\varphi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx\right\} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+h)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx\right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right||\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right|dx \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \operatorname{ess} V(f)\end{aligned}$$

$h \to 0$ として, 次が得られる:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx\right| \leq \|\varphi\|_\infty \operatorname{ess} V(f) \text{ for } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

$C_0^\infty(\mathbb{R})$ がコンパクトなサポートを持つ連続関数 $C_0(\mathbb{R})$ の中で稠密なので, $Df \in (C_0(\mathbb{R}))^*$. 従って, $f \in BV(\mathbb{R})$ かつ $|Df|(\mathbb{R}) \leq \operatorname{ess} V(f)$.

一方, 逆 $(\Rightarrow)$ を示すために, $f \in BV(\mathbb{R})$ とする.

ここで, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$, supp $\subset [-1,1]$ と置き, 更に, $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\rho(x/\varepsilon)$ と置く. いま, 特に, $\varepsilon = 1/n$ と置き,

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{1/n}(x-y)f(y)\,dy = (\rho_{1/n} * f)(x)$$

と定義すれば, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ かつ, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(\forall x \in D_f)$ が成り立つことが容易に確かめられる.

いま $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して, Fubini の定理により,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)(\rho_{1/n}*\varphi')(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)(\rho_{1/n}*\varphi)'(x)\,dx.$$

これと, $(\varphi * \rho_{1/n})(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\|(\varphi * \rho_{1/n})\|_\infty \leq 1$ より

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_n'(x)\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)(\varphi * \rho_{1/n})'(x)\,dx\right| \leq |Df|(\mathbb{R}).$$

ここで, φ も任意なので, $\int_{\mathbb{R}} |f_n'(x)|\,dx \leq |Df|(\mathbb{R})$ が成り立つ.

更に, $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, $x_i \in D_f$ を任意にとると,

$$\sum_{i=1}^k |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_n'(x)\,dx\right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_n'(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n'(x)|\,dx \leq |Df|(\mathbb{R}).$$

$n \to \infty$ とすれば, $x_i \in D_f$ より

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |Df|(\mathbb{R})$$

が得られる. これより, $\mathrm{ess}\, V(f) \leq |Df|(\mathbb{R})$. 従って, $\mathrm{ess}\, V(f) = |Df|(\mathbb{R})$ が成り立つ ■

定理 8 $f \in L_1(\mathbb{R})$ とすれば,

$f \in BV(\mathbb{R})$ であるための必要十分条件は $\Lambda_1(f) = \ell_1$.

証明 $f \in BV(\mathbb{R})$ と仮定する. 補題 6 と定理 7 より, 直ちに, 次の不等式が得られる:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|\, dx \leq \mathrm{ess}\, V(f)|a|, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

これより直ちに, $\ell_1 \subseteq \Lambda_1(f)$. 逆向きの包含関係, $\ell_1 \supseteq \Lambda_1(f)$ は**準備**で述べた (i) ([3, Theorem 1]) から得られる. よって, $\ell_1 = \Lambda_1(f)$.

逆を背理法で証明するために, $\mathrm{ess}\, V(f) = \infty$ と仮定する. 定理 2 より, 任意の n に対し, 次を不等式を満たすよう, $h_n \neq 0$ を取ることができる:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x-h_n) - f(x)}{h_n} \right| dx > 2^n.$$

故に,

$$|h_n| < \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h_n) - f(x)|\, dx \leq 2^{1-n} \|f\|_1.$$

そこで, 不等式 $N|h_n| \leq 2^{1-n}\|f\|_1$ を満たす最大の正の自然数 N を $N(n)$ と置く.

$N(n)$ の最大性から

$$2^{1-n}\|f\|_1 < (N(n)+1)|h_n| < 2N(n)|h_n|.$$

故に,

$$\|f\|_1 < N(n)2^n|h_n| < N(n) \int_{\mathbb{R}} |f(x-h_n) - f(x)|\, dx.$$

これを用いて数列 (a_n) を構成する:

$$\begin{aligned}
&a_1 = h_1, \cdots, a_{N(1)} = h_1 \\
&a_{N(1)+1} = h_2, \cdots, a_{N(1)+N(2)} = h_2 \\
&\vdots \\
&a_{N(1)+N(2)+1} = h_3, \cdots, a_{N(1)+N(2)+N(3)} = h_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

以下同様にして, 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)$ を定義する.

これより,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}N(n)|h_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}2^{1-n}\|f\|_1 < +\infty.$$

つまり, $\boldsymbol{a} \in \ell_1$.

一方,

$$\Psi(\boldsymbol{a}; f) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x-a_n)-f(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}N(n)\int_{\mathbb{R}}|f(x-h_n)-f(x)|\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty}\|f\|_1 = \infty.$$

従って, $\boldsymbol{a} \notin \Lambda_1(f)$. これは仮定, $\ell_1 = \Lambda_1(f)$ に矛盾. ■

References

[1] S. D. Chatterji and V. Mandrekar, Quasi-invariance of measures under translation, Math. Z. **154**(1977), 19–29.

[2] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, A class of sequence spaces defined by a non-negative integral function, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces II. Kitakyushu, Japan, 2006, 309–317.

[3] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, An L_p-function determines ℓ_p, Proc. Japan Acad., **84**(2008), Ser. A , 39–41.

[4] H. Shimomura, An aspect of quasi-invariant measures on $\mathbb{R}^\infty$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **11**(1976), 749–773.

[5] William P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation (Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag, New York, 1989